**Aufgabe 1** *(Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten)* (4 Punkte)
Sei $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $c(t) := (1-t)p + tq$.

(i) Zeigen Sie, dass $L(\tilde{c}) \geq L(c)$ für alle parametrisierten Kurven $\tilde{c} \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{c}(a) = p, \tilde{c}(b) = q$ ($a, b \in \mathbb{R}$ beliebig).

(ii) Sei $\alpha \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$. Zeigen Sie: Falls $L(c) = L(\alpha)$, dann gilt $\alpha(t) = (1 - \phi(t))p + \phi(t)q$, wobei $\phi : [a,b] \to [0,1]$ nichtfallend und stetig ist.

**Aufgabe 2** *(Maxima)* (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre $C^2$-Kurve, so dass $|\alpha(t)|$ an der Stelle $t_0 \in I$ ein lokales Maximum hat. Zeigen Sie: $\kappa(t_0) \geq \left|\frac{1}{\alpha(t_0)}\right|$, wobei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ die Krümmung von $\alpha$ ist.

**Aufgabe 3** *(Klothoide)* (4 Punkte)

(i) Sei $r > 0$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Mit $rI$ werde das Intervall $\{rs \,|\, s \in I\}$ bezeichnet. Seien $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ und $\beta \in C^2(rI, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Für all $s \in I$ gelte $\kappa_\beta(rs) = \frac{1}{r}\kappa_\alpha(s)$, wobei $\kappa_\alpha$ bzw. $\kappa_\beta$ die Krümmung von $\alpha$ bzw. $\beta$ bzgl. gewählter Einheitsnormalen bezeichnet. Zeigen Sie: $\alpha$ und $\beta$ sind ähnlich, d.h. es existiert eine euklidische Bewegung $f$ des $\mathbb{R}^2$, so dass $r\alpha(s) = f(\beta(rs))$ für alle $s \in I$.

(ii) Für $a > 0$ bezeichne $\alpha_a \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ die nach der Bogenlänge parametrisierte Klothoide mit Krümmungsfunktion $\kappa_a(s) = \frac{s}{a^2}$. Zeigen Sie: Für $a, b > 0$ sind $\alpha_a$ und $\alpha_b$ ähnlich im Sinne von (i). Bestimmen Sie den Streckfaktor $r$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die ebene Kurve $c \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, gegeben durch

$$c(t) = \Big((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t\Big),$$

die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Punkte mit vertikalen bzw. horizontalen Tangenten. Skizzieren Sie $c$, berechnen Sie die Krümmung bzgl. der Einheitsnormalen $\nu = J\tau$, wobei $\tau = \frac{c'}{|c'|}$ und $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und zeichnen Sie die Punkte extremaler Krümmung ein.

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, den 18.05.11.*